TRANSACTIONS OF THE
AMERICAN MATHEMATICAL SOCIETY
Volume 352, Number 6, Pages 2701–2721
S 0002-9947(00)02581-2
Article electronically published on February 28, 2000

PROBLÈME DE DIRICHLET POUR UNE ÉQUATION DE MONGE-AMPÈRE RÉELLE ELLIPTIQUE DÉGÉNÉRÉE EN DIMENSION n

AMEL ATALLAH

Résumé. On considère dans un ouvert borné Ω de $\mathbb{R}^n$, à bord régulier, le problème de Dirichlet

$$\begin{cases} \det u_{ij} = f(x) \text{ dans } \Omega, \\ u|_{\partial\Omega} = \varphi, \end{cases} \tag{1}$$

où $f \in C^{s_*}(\overline{\Omega}), \varphi \in C^{s_*+2,\alpha}(\Omega)$, f est positive et s'annule sur Σ un ensemble fini de points de Ω. On démontre alors sous certaines hypothèses sur φ et si $|\det \varphi_{ij} - f|_{C^{s_*}}$ est assez petit, que le problème (1) possède une solution convexe unique $u \in C^{[s_*-3-n/2]}(\overline{\Omega})$.

Abstract. We consider in a bounded open set Ω of $\mathbb{R}^n$, with regular boundary, the Dirichlet problem

$$\begin{cases} \det u_{ij} = f(x) \text{ in } \Omega, \\ u|_{\partial\Omega} = \varphi, \end{cases} \tag{1}$$

where $f \in C^{s_*}(\overline{\Omega}), \varphi \in C^{s_*+2,\alpha}(\Omega)$, f is positive and vanishes on Σ, a finite set of points in Ω. We prove, under some hypothesis on φ and if $|\det \varphi_{ij} - f|_{C^{s_*}}$ is sufficiently small, that the problem (1) has a unique convex solution $u \in C^{[s_*-3-n/2]}(\overline{\Omega})$.

0. Introduction

Plusieurs travaux ont été consacrés à l'étude de l'existence de solutions convexes régulières pour l'équation de Monge-Ampère

$$\det u_{ij} = f(x, u, \nabla u), \tag{0.1}$$

dans un domaine borné strictement convexe Ω de $\mathbb{R}^n$.

Dans le cas où (0.1) est elliptique, c'est-à-dire f est strictement positive dans $\overline{\Omega}$, Caffarelli, Nirenberg, Spruck [C.N.S.1], on montré que si f est C^∞ et $f_u \geq 0$, le problème de Dirichlet associé à (0.1) possède une solution unique strictement convexe $u \in C^\infty(\overline{\Omega})$, sous l'hypothèse d'existence d'une sous-solution. On cite aussi les travaux de [C.N.S.2], [E], [K], [T], [U]...

Dans le cas où f est positive ou nulle, Lin [L] en dimension $n = 2$, a montré l'existence d'une solution locale de classe C^s; puis Hong et Zuily [H.Z] en dimension

Received by the editors April 17, 1995.
1991 *Mathematics Subject Classification.* Primary 35J25, 35J70, 35Q99.
Key words and phrases. Equation de Monge-Ampère, problème de Dirichlet, équation elliptique dégénérée.

n quelconque ont montré, si f s'annule à un ordre fini, l'existence d'une solution locale convexe de classe C^∞.

Concernant le problème de Dirichlet associé à l'équation (0.1) dans le cas où f peut s'annuler, l'existence d'une solution globale assez régulière n'est pas toujours possible pour des données quelconques, et dans le cas général la solution est au maximum de classe $C^{1,1}$ dans $\overline{\Omega}$. On peut citer l'exemple dû à Urbas [U] dans le cas où f est identiquement nulle, également ceux d'Amano [A] et Zuily [Z] dans des cas un peu plus généraux.

Signalons aussi les travaux de [C.N.S.3] qui montrent dans le cas où f est identiquement nulle, si $\partial\Omega$ et φ sont de classe $C^{3,1}$, que la solution est de classe $C^{1,1}$ dans $\overline{\Omega}$. Ils montrent aussi que ce résultat est optimal en donnant un exemple où $\varphi \in C^{3,1-2\varepsilon}(\partial\Omega)$, ε positif assez petit et la solution $u \in C^{1,1-\varepsilon}(\overline{\Omega})$ mais $u \notin C^{1,1}(\Omega)$. La difficulté provient du fait que f pouvant s'annuler, le linéarisé a un symbole positif ou nul et on ne peut donc pas appliquer les méthodes usuelles pour les opérateurs elliptiques.

L'objet de ce travail est de traiter un cas particulier où f peut s'annuler. Plus précisément on considère dans un ouvert borné Ω de $\mathbb{R}^n$ à bord C^∞ le problème de Dirichlet

$$\begin{cases} \det u_{ij} = f(x) \text{ dans } \Omega, \\ u|_{\partial\Omega} = \varphi \end{cases} \tag{0.2}$$

où f et φ sont assez régulières et (u_{ij}) est la matrice Henssienne de u. On démontre alors dans le cas où f s'annule en un nombre fini de points à l'intérieur de Ω, sous certaines hypothèses sur φ, et si $|\det \varphi_{ij} - f|_{s_*}$ est assez petit, l'existence d'une solution convexe unique assez régulière jusqu'au bord pour le problème (0.2). La preuve consiste à établir des estimations a priori pour des opérateurs elliptiques dégénérés puis à construire pour le linéarisé un schéma itératif approprié du type Nash-Moser dont la convergence assure l'existence de la solution. Ce résultat généralise à la dimension n quelconque les travaux d'Amano [A] qui démontre un résultat analogue en dimension $n = 2$.

I. Notations et résultats

On considère dans un ouvert borné Ω de $\mathbb{R}^n$ à bord C^∞, le problème de Dirichlet

$$\det u_{ij} = f(x) \text{ dans } \Omega, \quad u|_{\partial\Omega} = \varphi. \tag{I.1}$$

Ici u est une fonction réele, $u_{ij} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}$ et φ est une fonction définie sur $\overline{\Omega}$.

Soit Σ un ensemble fini de points de Ω, on supposera dans ce qui suit

$$\begin{cases} \text{(i)} \quad f \geq 0 \text{ dans } \overline{\Omega}, \\ \text{(ii)} \quad f^{-1}(0) = \Sigma \end{cases} \tag{I.2}$$

et

$$\begin{cases} \text{(i)} \quad (\varphi_{ij})|_{\overline{\Omega}\setminus\Sigma} \text{ est strictement convexe, } (\varphi_{ij})|_\Sigma \text{ est de rang } (n-1), \\ \text{(ii)} \quad \text{les valeurs propres de } (\varphi_{ij}) \text{ sur } \Sigma \text{ sont distinctes.} \end{cases} \tag{I.3}$$

On a alors le résultat suivant:

Théorème A. *Pour tout entier* $s_* \geq 7 + n$, *tout* $\alpha \in]0, 1[$ *et toute fonction* $\varphi \in C^{s_*+2,\alpha}(\overline{\Omega})$ *vérifiant* (I.3), *il existe une constante* $\varepsilon_0 > 0$ *telle que pour toute fonction* $f \in C^{s_*}(\overline{\Omega})$ *satisfaisant* (I.2) *et*

$$|\det \varphi_{ij} - f|_{C^{s_*}} \leq \varepsilon_0, \tag{I.4}$$

le problème (I.1) *possède une solution convexe unique* u *dans* $C^{[s_*-3-n/2]}(\overline{\Omega})$.

Remarque. Dans le cas où $\Sigma = \{x_0\}$, on pourra considérer par exemple pour ε assez petit, la fonction f définie par $f(x) = \det \varphi_{ij} + \varepsilon|x - x_0|^2$.

Les normes que nous utiliserons sont notées comme suit

$$|\ |_k = \|\ \|_{C^k(\overline{\Omega})}, \|\ \|_k = \|\ \|_{H^k(\Omega)} \text{ et } |\ |_{k,\alpha} = \|\ \|_{C^{k,\alpha}(\overline{\Omega})}$$

où $k \in \mathbb{N}$ et $\alpha \in]0, 1[$.

II. Preuve du Théorème A

II.1. **Préliminaires.**

A. On effectue dans ce paragraphe une réduction du problème et on démontre quelques résultats techniques qui nous seront utiles dans la suite. Tout d'abord on pourra supposer que Σ est réduit à un point que l'on peut supposer être l'origine. De plus comme l'équation (I.1) est invariante par rotation de coordonnées et d'après (I.3) on pourra supposer qu'il existe des coordonnées dans lesquelles on peut écrire:

$$\varphi_{ij}(0) = \sigma_i \delta_{ij}, \qquad i, j = 1, \ldots, n, \tag{II.1}$$

où $\sigma_i > 0$ pour $i = 1, \ldots, n-1, \sigma_n = 0$ et $\sigma_i \neq \sigma_j$ pour $i \neq j$.

Pour $\varepsilon \geq 0$, $w \in C^2(\overline{\Omega})$ on pose

$$\begin{cases} \Phi_{ij}(x, \varepsilon, w) = \varphi_{ij} + \varepsilon w_{ij}, \qquad 1 \leq i, j \leq n, \\ \Phi = (\Phi_{ij}(x, \varepsilon, w)), \end{cases} \tag{II.2}$$

$$\widetilde{\Phi} = (\Phi^{ij}), \text{ la matrice des cofacteurs de } \Phi. \tag{II.3}$$

Notons que $\Phi^{ij} = \frac{\partial F}{\partial \Phi_{ij}}(\Phi)$, où F est la fonction déterminant. On a alors le résultat suivant:

Lemme II.1. *Pour* $\varepsilon \geq 0$, $w \in C^2(\overline{\Omega})$ *et* $x \in \overline{\Omega}$, *il existe une matrice orthogonale* $T = T(x, \varepsilon, w)$ *telle que*

$$T\Phi^tT = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n), \quad T\widetilde{\Phi}^tT = \operatorname{diag}(\tilde{\lambda}_1, \ldots, \tilde{\lambda}_n), \tag{II.4}$$

$$\tilde{\lambda}_i = \prod_{j \neq i} \lambda_j, \qquad i = 1, \ldots, n. \tag{II.5}$$

Soit $\kappa \in]0, 1[$, $\kappa \leq \frac{\alpha}{4}$ où α est tel que $\varphi \in C^{s_*+2,\alpha}(\overline{\Omega})$.

Le résultat suivant précise la nature des valeurs propres de Φ.

Lemme II.2. *Il existe des constantes* $\varepsilon_1 > 0, \delta_1 > 0$ *et* $M > 0$ *qui ne dépendent que de* φ, n, Ω *telles que, en posant* $V = \{|x| \leq \delta_1, 0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_1, w \in C^{3,\kappa}(\overline{\Omega}), |w|_{3,\kappa} \leq 1\}$ *on ait*

(i) *les valeurs propres* λ_i, $i = 1, \ldots, n$, *det* Φ *sont distinctes dans* V *et de classe* C^1 *dans* $\mathring{V}$. *De plus* $\lambda_i > 0$ *dans* V *pour* $i = 1, \ldots, n-1$.

(ii) *Pour* $(x,\varepsilon,w)\in V$:

$$\sum_{i=1}^{n}|\sigma_i-\lambda_i(x,\varepsilon,w)|+\left|\Phi^{nn}(x,\varepsilon,w)-\prod_{i=1}^{n-1}\sigma_i\right|\le M(\varepsilon+|x|), \tag{II.6}$$

(iii) *pour* $(x,\varepsilon,w)\in V$ *et* $i=1,\dots,n-1$

(II.7)

$$\lambda_i\ge\inf_{1\le i\le n-1}\sigma_i-M\delta_1-(M+1)\varepsilon_1>0 \ \textit{et}\ \Phi^{nn}\ge\prod_{i=1}^{n-1}\sigma_i-M\delta_1-M\varepsilon_1>0.$$

Preuve. Pour $(x,\varepsilon,w,\lambda)\in\overline{\Omega}\times\mathbb{R}_+\times C^3(\overline{\Omega})\times\mathbb{R}$ on définit

$$g(x,\varepsilon,w,\lambda)=\det(\varphi_{ij}+\varepsilon w_{ij}-\lambda\delta_{ij}).$$

g est une fonction de classe C^1 de ses arguments. Soit $i\in\{1,\dots,n\}$; d'après (II.1) on a

$$g(0,0,0,\sigma_i)=0 \text{ et } \frac{\partial g}{\partial\lambda}(0,0,0,\sigma_i)\ne 0.$$

Le théorème des fonctions implicites implique qu'il existe des constantes $\varepsilon_1>0,\delta_1>0$ et $M>0$ telles que l'on ait (i) et (iii). De plus d'après (II.1) on a:

$$\frac{\partial F}{\partial u_{nn}}(\varphi_{ij})(0)=\Phi^{nn}(0,0,w)=\prod_{i=1}^{n-1}\sigma_i>0,$$

d'où (iii). □

Voici le résultat essentiel de ce paragraphe. Posons pour $\varepsilon>0, x\in\overline{\Omega}$ et $w\in C^2(\overline{\Omega})$

$$G(w)=\frac{1}{\varepsilon}[F(\Phi_{ij}(x,\varepsilon,w))-f]. \tag{II.8}$$

Le linéarisé de G en w est

$$L_G(w)=\sum_{i,j=1}^{n}\Phi^{ij}\partial_i\partial_j. \tag{II.9}$$

On a alors

Proposition II.3. *Il existe une constante positive* ε_2 *telle que pour* $0<\varepsilon\le\varepsilon_2$, $w\in C^{3,\kappa}(\overline{\Omega}), |w|_{3,\kappa}\le 1$, *l'opérateur*

$$L=-L_G(w)-\theta\Delta,\ \textit{où}\ \theta=\sup_{x\in\overline{\Omega}}|G(w)|, \tag{II.10}$$

un a symbole positif ou nul sur $\overline{\Omega}\times\mathbb{R}^n$. (*Ici* $\Delta=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$.)

Preuve. Le symbole de L est

$$A=\theta|\xi|^2+\sum_{i,j=1}^{n}\Phi^{ij}\xi_i\xi_j. \tag{II.11}$$

Tout d'abord montrons que $A\ge 0$ pour $|x|\le\delta_1$ et $\xi\in\mathbb{R}^n$. Posons $\xi={}^tT\tilde{\xi}$ où T est définie en (II.4). D'après (II.10) on a

$$A=\theta|\tilde{\xi}|^2+\langle T\widetilde{\Phi}{}^tT\tilde{\xi},\tilde{\xi}\rangle.$$

En utilisant (II.4) et (II.5) on obtient

$$A = \theta|\tilde{\xi}|^2 + \sum_{i=1}^{n} \tilde{\lambda}_i \tilde{\xi}_i^2 \text{ où } \tilde{\lambda}_i = \prod_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} \lambda_j.$$

D'après (II.7) et (II.8) on a:

$$\begin{aligned} A &= \left(\theta + \prod_{i=1}^{n-1} \lambda_i\right) \tilde{\xi}_n^2 + \sum_{i=1}^{n-1} \left(\frac{\det \Phi}{\lambda_i} + \theta\right) \tilde{\xi}_i^2 \\ &= \left(\theta + \prod_{i=1}^{n-1} \lambda_i\right) \tilde{\xi}_n^2 + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\varepsilon G + f + \theta\lambda_i}{\lambda_i} \tilde{\xi}_i^2. \end{aligned}$$

(II.7) implique pour $i = 1, \ldots, n-1, |x| \leq \delta_1, \varepsilon \leq \varepsilon_1, |w|_{3,\kappa} \leq 1$

$$\theta\lambda_i + \varepsilon G \geq \theta(\sigma_i - M\delta_1 - (M+1)\varepsilon_1) \geq 0;$$

comme f est positive, on a $A \geq 0$.

Ensuite comme φ est strictement convexe dans $\overline{\Omega} \setminus B(0, \delta_1)$, il est facile de voir que $A > 0$ pour x dans cet ensemble et $\xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. □

B. Le résultat essentiel de ce paragraphe est la:

Proposition II.4. *L est une opérateur formellement auto-adjoint.*

Preuve. Elle consiste à montrer que tout opérateur P de la forme

$$P = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial u_{ij}}(u_{ij})\partial_i\partial_j$$

où $u \in C^3(\overline{\Omega})$ est formellement auto-adjoint.

Posons $\Psi(x) = \det u_{ij}(x)$ et $S = \{x \in \Omega, \Psi(x) = 0\}$. On a

$$P = \sum_{i=1}^{n} \partial_i \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial u_{ij}}(u_{ij})\partial_j\right) - \sum_{i,j=1}^{n} \partial_i \left(\frac{\partial F}{\partial u_{ij}}\right)(u_{ij})\partial_j;$$

nous allons montrer que pour tous $j = 1, \ldots, n, x \in \overline{\Omega}$

$$A_j(x) = \sum_{i=1}^{n} \partial_i \left(\frac{\partial F}{\partial u_{ij}}\right)(u_{ij})(x) = \sum_{i,p,q=1}^{n} \frac{\partial^2 F}{\partial u_{ij}\partial u_{pq}}(u_{ij})u_{ipq}(x) = 0.$$

Nous utiliserons l'identité suivante dont la preuve se trouve dans [Z] (Lemme 1.6). Pour tous $i, j, p, q = 1, \ldots, n$ on a

$$\Psi \frac{\partial^2 F}{\partial u_{ij}\partial u_{pq}}(u_{ij}) = \left(\frac{\partial F}{\partial u_{ij}}\frac{\partial F}{\partial u_{pq}} - \frac{\partial F}{\partial u_{ip}}\frac{\partial F}{\partial u_{jq}}\right)(u_{ij}). \tag{II.12}$$

Soit $x_0 \in \overline{\Omega}$. Si $x_0 \in S$ alors le résultat découle de (II.12), sinon on s'y ramène en utilisant essentiellement la continuité de la fonction déterminant. □

C. L'objet de ce paragraphe est de rappeler certaines estimations classiques que nous utiliserons dans la suite, puis de prouver des estimations sur G et l'opérateur $L_G(w)$.

Soit s_* un entier, $s_* \geq 7+n$. Il existe une constante $\beta > 0$ (on prendra $\beta \geq 2$) telle que pour tous $0 \leq i, j, k \leq s_* + 2$, pour $n_* = \frac{n}{2} + \kappa$ et $u \in C^{s_*+2,\alpha}(\Omega)$ on ait: Inégalité de Sobolev

$$|u|_{i,\kappa} \leq \beta \|u\|_{i+n_*}. \tag{II.13}$$

Inégalité de Gagliardo-Nirenberg

$$\|u\|_j \leq \beta \|u\|_i^{\frac{k-j}{k-i}} \|u\|_k^{\frac{j-i}{k-i}}, \quad i < j < k. \tag{II.14}$$

Opérateurs de lissage: pour tout $\lambda \geq 1$, il existe un opérateur $S_\lambda : H^i(\Omega) \to H^j(\Omega)$ tel que

$$\|S_\lambda u\|_i \leq \beta \|u\|_j, \qquad i \leq j, \tag{II.15}$$

$$\|S_\lambda u\|_i \leq \beta \lambda^{i-j} \|u\|_j, \qquad i \geq j, \tag{II.16}$$

$$\|S_\lambda u - u\|_i \leq \beta \lambda^{i-j} \|u\|_j, \quad i \leq j. \tag{II.17}$$

On a aussi pour $u \in C^{s_*}(\Omega)$:

$$\|u\|_{s_*} \leq \beta |u|_{s_*}. \tag{II.18}$$

On rappelle également les estimations suivantes (cf. [A.G], [Hör])

a) Si $u, v \in L^\infty \cap H^s$ $(s > 0)$ alors $uv \in L^\infty \cap H^s$ et il existe une constante $K_1 > 0$ indépendante de u et v telle que

$$\|uv\|_s \leq K_1(|u|_0 \|v\|_s + \|u\|_s |v|_0). \tag{II.19}$$

b) Soit $H : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$, une fonction de classe C^∞, vérifiant $H(0) = 0$.

• Si $u \in (L^\infty \cap H^s)^N$ $(s > 0)$ alors $H(u) \in L^\infty \cap H^s$ et si $|u|_0 \leq M$, il existe une constante $K_2 = K_2(s, H, M)$ telle que:

$$\|H(u)\|_s \leq K_2 \|u\|_s. \tag{II.20}$$

• Si $u \in C^{i,\mu}$, $\mu \in]0,1[$, $i \in \mathbb{N}$ alors $H(u) \in C^{i,\mu}$ et si $|u|_0 \leq M$, il existe une constante $K_3 = K_3(\mu, i, H, M)$ telle que

$$|H(u)|_{i,\mu} \leq K_3 |u|_{i,\mu}. \tag{II.21}$$

Le résultat principal de ce paragraphe est la:

Proposition II.5. *Il existe une constante $K_0 > 0$, telle que pour toutes fonctions $w^i \in C^{s_*+2,\kappa}(\Omega), |w^i|_2 \leq 1$, $i = 1, 2, 3$ et pour $\varepsilon \leq 1$ on ait:*

$$|G(w^1) - G(w^2)|_0 \leq K_0 |w^1 - w^2|_2 * (\|\varphi\|_{2+n_*} + \|w^2\|_{2+n_*} + \|w^1\|_{2+n_*}) \tag{II.22}$$

et pour tous $t \in [0,1], s \in [0, s_*]$:

$$\begin{aligned} &\left\| \frac{d}{dt}[L_G(w^1 + tw^2)w^3] \right\|_s \\ &\quad \leq \varepsilon K_0 [(\|\varphi\|_{s+2} + \varepsilon \|w^1\|_{s+2} + \varepsilon \|w^2\|_{s+2} + 1) |w^2|_2 |w^3|_2 \\ &\qquad + (\|\varphi\|_{2+n_*} + \varepsilon \|w^1\|_{2+n_*} + \varepsilon \|w^2\|_{2+n_*} + 1) \\ &\qquad\qquad \cdot (|w^2|_2 \|w^3\|_{s+2} + |w^3|_2 \|w^2\|_{s+2})]. \end{aligned} \tag{II.23}$$

Preuve de (II.22).

(II.24)
$$G(w^1) - G(w^2) = \frac{1}{\varepsilon}[\det(\varphi_{ij} + \varepsilon w^1_{ij}) - \det(\varphi_{ij} + \varepsilon w^2_{ij})]$$
$$= \int_0^1 \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial F}{\partial u_{ij}}(\varphi_{ij} + \varepsilon w^2_{ij} + t\varepsilon(w^1_{ij} - w^2_{ij}))(w^1_{ij} - w^2_{ij})\, dt.$$

Or

(II.25)
$$|\varphi_{ij} + \varepsilon w^2_{ij} + t\varepsilon(w^1_{ij} - w^2_{ij})|_0 \le |\varphi|_2 + 2|w^2|_2 + |w^1|_2 \le 3 + |\varphi|_2.$$

(II.22) résulte alors de (II.13), (II.21), (II.24) et (II.25). □

Preuve de (II.23).

$$\frac{d}{dt}[L_G(w^1 + tw^2)w^3] = \frac{d}{dt}\left[\sum_{i,j=1}^n \frac{\partial F}{\partial u_{ij}}(\varphi_{ij} + \varepsilon w^1_{ij} + t\varepsilon w^2_{ij})w^3_{ij}\right]$$
$$= \varepsilon \sum_{i,j,p,q=1}^n \frac{\partial^2 F}{\partial u_{ij}\partial u_{pq}}(\varphi_{ij} + \varepsilon w^1_{ij} + t\varepsilon w^2_{ij})w^2_{pq}w^3_{ij}.$$

D'après (II.19) on a pour $s \in [0, s_*]$:

$$\left\|\frac{d}{dt}[L_G(w^1 + tw^2)w^3]\right\|_s$$
$$\le \varepsilon K_1 \left[\sum_{i,j,p,q=1}^n \left\|\frac{\partial^2 F}{\partial u_{ij}\partial u_{pq}}(\varphi_{ij} + \varepsilon w^1_{ij} + t\varepsilon w^2_{ij})\right\|_s |w^2|_2 |w^3|_2\right.$$
$$\left. + K_1(|w^2|_2\|w^3\|_s + |w^3|_2\|w^2\|_s) \sum_{i,j,p,q=1}^n \left|\frac{\partial^2 F}{\partial u_{ij}\partial u_{pq}}(\varphi_{ij} + \varepsilon w^1_{ij} + t\varepsilon w^2_{ij})\right|_0\right].$$

Or

$$|(\varphi_{ij} + \varepsilon w^1_{ij} + t\varepsilon w^2_{ij})|_0 \le |\varphi|_2 + \varepsilon|w^1|_2 + \varepsilon t|w^2|_2 \le 2 + |\varphi|_2.$$

(II.23) résulte alors de (II.13), (II.20) et (II.21). □

II.2. **Existence de solutions et estimations H^s.** Soit $\varepsilon > 0$ satisfaisant aux contraintes apparaissant aux Lemme II.2, Propositions II.3 et II.5; et L l'opérateur défini en (II.10).

(II.26)
$$L = -L_G(w) - \theta\Delta = \sum_{i,j=1}^n a^{ij}\partial_i\partial_j,$$
$$a^{ij} = -\frac{\partial F}{\partial u_{ij}}(\varphi_{ij} + \varepsilon w_{ij}) - \theta\delta_{ij} = -\Phi^{ij} - \theta\delta_{ij}.$$

Pour $k, s \in \mathbb{N}$ on note:

(II.27)
$$\begin{cases} A(k) = \max\left(1, \max\limits_{1\le i,j\le n} |a^{ij}|_k\right) \text{ et} \\ \Lambda_s = \{(i,j), 0 \le i, j \le s, i + j \le s \text{ et } i + 2 \le \max(s, 2)\}. \end{cases}$$

Le résultat principal de ce paragraphe est le suivant:

Théorème II.6. *Supposons que $\theta \leq 1$ et qu'il existe $M_0 > 0$ tel que $A(2) \leq M_0$. Il existe alors $\varepsilon_3 > 0$ tel que pour tout ε, $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_3$, tout $w \in C^{s_*+2,\kappa}(\Omega)$ vérifiant $|w|_{3,\kappa} \leq 1$ et tout $g \in H^{s_*}$, le problème*

$$\begin{cases} Lu = g \ \ dans\ \Omega, \\ u|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases} \tag{II.28}$$

possède une solution unique $u \in H^{s_*}$. De plus pour tout $0 \leq s \leq s_*$ il existe une constante $C_s > 0, C_s = C_s(\varphi, s, \Omega, M_0, \varepsilon_3)$ telle que

$$\|u\|_0 \leq C_0 \|g\|_0, \tag{II.29}$$

$$\|u\|_1 \leq C_1(\|g\|_1 + \|u\|_0), \tag{II.30}$$

$$\|u\|_s \leq C_s \left(\|g\|_s + \sum_{\substack{(i,j)\in\Lambda_s \\ j \leq s-1}} (1 + |\varphi + \varepsilon w|_{i+4,\kappa}) \|u\|_j \right), \quad s \geq 2. \tag{II.31}$$

Pour montrer ce théorème on va d'abord montrer la proposition suivante. Posons pour $\nu \in]0, 1]$, $L_\nu = L - \nu\Delta$.

Proposition II.7. *Supposons que $\theta \leq 1$ et qu'il existe $M_0 > 0$ tel que $A(2) \leq M_0$. Il existe alors $\varepsilon_3 > 0$ tel que pour tous $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_3$, $w \in C^{s_*+2,\kappa}(\Omega)$ vérifiant $|w|_{3,\kappa} \leq 1$ et $g \in H^{s_*}(\Omega)$, le problème*

$$\begin{cases} L_\nu u = g \ \ dans\ \Omega, \\ u|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases} \tag*{(II.28)$'$}$$

possède une solution unique $u \in H^{s_*+1}(\Omega)$.

Preuve. D'après la Proposition II.3, L a un symbole positif ou nul donc L_ν est uniformément elliptique. Les coefficients de L_ν sont dans $C^{s_*-1,1}(\Omega)$ et $g \in H^{s_*}$ donc d'après un résultat de Gilbarg, Trudinger ([G.T], Théorèmes 6.14 et 8.13), le problème (II.28)$'$ possède une solution unique $u \in H^{s_*+1}(\Omega)$. ☐

Le reste de ce paragraphe est consacré à montrer les estimations (II.29) à (II.31) pour l'opérateur régularisé L_ν avec des constantes C_s indépendantes de ν. Puis en faisant tendre ν vers zéro on obtient la solution $u \in H^{s_*}(\Omega)$ de (II.28) et les estimations (II.29) à (II.31). Pour la preuve on va adopter la technique de [A] au cas présent.

II.2.1. *Estimations dans la zone elliptique de L.* Les résultats de ce paragraphe que nous reproduisons pour la commodité du lecteur, sont prouvés par Amano [A].

Proposition II.8 ([A], Lemme 3.9)**.** *Soit $P = \sum_{i,j=1}^n a^{ij}\partial_i\partial_j$ un opérateur à coefficients réels appartenant à $C^{s_*,\kappa}(\Omega)$. On suppose que P est uniformément elliptique dans $\overline{\Omega}$, c'est-à-dire qu'il existe une constante $\lambda_0 > 0$ telle que:*

$$\sum_{i,j=1}^n a^{ij}\xi_i\xi_j \geq \lambda_0|\xi|^2, \ \textit{pour tout}\ (x,\xi) \in \overline{\Omega} \times \mathbb{R}^n.$$

Alors pour tout entier $1 \leq s \leq s_*$ il existe une constante C'_s qui ne dépend que de s, λ_0, Ω et de la norme L^∞ des coefficients de P, telle que pour toute fonction réelle

$u \in C^{s_*,\kappa}(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ *on ait*:

$$\|u\|_1 \le C_1'(\|Pu\|_0 + A(2)\|u\|_0), \tag{II.32}$$

$$\|u\|_s \le C_s' \left(\|Pu\|_{s-1} + \sum_{\substack{i+j \le s-1 \\ i \le s-2}} A(i+2)\|u\|_j \right), \quad s \ge 2. \tag{II.33}$$

D'autre part soit $P = \sum_{i,j=1}^n a^{ij}\partial_i\partial_j$ un opérateur à coefficients réels appartenant à $C^{s_*,\kappa}(\Omega)$, dont le symbole est positif ou nul. Soit $\lambda(x)$ la plus petite valeur propre de la matrice $(a^{ij}(x))$. Notons $S = \{x \in \Omega, \lambda(x) = 0\}$ et pour $\delta > 0, S_\delta = \{x \in \Omega, d(x,\Omega) < \delta\}$. On a:

Lemme II.9 ([A], Lemme 3.2)**.** *Supposons P auto-adjoint et S réduit à un point. Il exite une fonction $\mu \in L^\infty(\Omega)$ et une constante $C > 0$, telle que $\mu = 0$ sur S, $\inf_{\overline{\Omega}\setminus S_\delta} \mu > 0$ pour δ assez petit et telle que pour $u \in C^{s_*,\kappa}(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ on ait*

$$\int_\Omega \mu u^2\,dx + \int_\Omega \lambda|\nabla u|^2\,dx \le C\|Pu\|_0\|u\|_0. \tag{II.34}$$

II.2.2. *Estimation au voisinage du lieu de dégénérescence de L.* Soit $L_\nu = L - \nu\Delta$ où L est défini en (II.26). Rappelons que d'après la Proposition II.4, il est auto-adjoint.

Pour $t \ge 1$ posons $U(t) = \{x \in \Omega, |x_n| < \frac{1}{t}\}$ et $V(t) = U(t) \cap B(0,\delta_1)$ où δ_1 est défini dans le Lemme II.2.

Le résultat principal de ce paragraphe est la:

Proposition II.10. *Pour tout entier $0 \le s \le s_*$ et toute fonction $u \in C_0^{s_*,\kappa}(V(t))$, il existe $C_s'' = C_s''(n,\Omega,\varphi,\delta_1) > 0$ telle que*

$$\|u\|_0 \le C_0'' t^{-2}\|L_\nu u\|_0, \tag{II.35}$$

$$\|u\|_s \le C_s'' t^{-2} \left(\|L_\nu u\|_s + \sum_{(i,j)\in\Lambda_s} A(i+2)\|u\|_j \right), \quad s \ge 1. \tag{II.36}$$

Preuve de (II.35). Elle utilise l'inégalité (II.7) et la généralisation en dimension n d'un lemme d'Amano (cf. [A], Lemme 3.1). □

Preuve de (II.36). Elle se fait par récurrence en utilisant (II.35). □

II.2.3. *Estimation des commutateurs.*

Lemme II.11 ([A], Lemme 3.7)**.** *Soit $P = \sum_{i,j=1}^n a^{ij}\partial_i\partial_j$ un opérateur à coefficients réels appartenant à $C^{s_*}(\Omega)$ dont le symbole est positif ou nul. Soit $\chi \in C^\infty(\overline{\Omega})$ telle que* Supp $\nabla\chi \subset \Omega$*. Alors pour tout entier $0 \le s \le s_*$, il existe une constante $C_s > 0$ telle que pour $u \in C^{s_*,\kappa}(\Omega)$*

$$\|[\chi,P]u\|_s \le C_s \left(\|Pu\|_s + \sum_{(i,j)\in\Lambda_s} A(i+2)\|u\|_j \right). \tag{II.37}$$

II.2.4. *Preuve des estimations* (II.29) *à* (II.31) *pour* L_ν. Soient $\chi \in C_0^\infty(V(t))$, $\chi_1, \chi_2 \in C_0^\infty(\overline{\Omega} \setminus \{0\})$, $0 \leq \chi, \chi_1, \chi_2 \leq 1$ et telles que $\chi = 1$ dans un voisinage de zéro contenu dans $V(t)$, $\chi_1 = 1$ sur le support de $\partial_i \chi$ pour tout i et $\chi_2 = 1$ sur le support de χ_1.

Soit $u \in C^{s_*,\kappa}(\Omega) \cap H_0^1$. Comme $\operatorname{Supp} \chi \subset V(t)$, on a d'après (II.36) pour $1 \leq s \leq s_*$:

$$\|\chi u\|_s \leq C_s'' t^{-2} \left(\|\chi L_\nu u\|_s + \|[\chi, L_\nu]\|_s + \sum_{\substack{(i,j) \in \Lambda_s \\ j < s}} (A(i+2)+1)\|u\|_j \right) + C_s'' t^{-2} (A(2)+1)\|\chi u\|_s. \tag{II.38}$$

Par hypothèse $A(2) \leq M_0$. On fixe donc t tel que pour $1 \leq s \leq s_*$

$$C_s'' t^{-2}(M_0+1) \leq \frac{1}{2}. \tag{II.39}$$

D'autre part $A(i+2) = \max(1, \max_{1 \leq p,q \leq n} |\frac{\partial F}{\partial u_{pq}}(\varphi_{kl} + \varepsilon w_{kl})|_{i+2} + \theta)$ or $|\varphi_{kl} + \varepsilon w_{kl}|_0 \leq |\varphi|_2 + 1$, il résulte donc de (II.21) que pour $0 \leq i \leq s_* - 2$, $1 \leq p, q \leq n$:

$$\left| \frac{\partial F}{\partial u_{pq}}(\varphi_{kl} + \varepsilon w_{kl}) \right|_{i+2} \leq C(\varphi)|\varphi + \varepsilon w|_{i+4,\kappa},$$

d'où comme $\theta \leq 1$:

$$A(i+2) \leq 1 + C(\varphi)|\varphi + \varepsilon w|_{i+4,\kappa}. \tag{II.40}$$

On déduit de (II.38), (II.39) et (II.40)

$$\|\chi u\|_s \leq 2C_s'' t^{-2} \left(\|L_\nu u\|_s + \|[\chi, L_\nu]\|_s + \sum_{\substack{(i,j) \in \Lambda_s \\ j < s}} (1 + |\varphi + \varepsilon w|_{i+4,\kappa})\|u\|_j \right). \tag{II.41}$$

Preuve de (II.29). Comme $\chi = 1$ dans un voisinage de zéro dans $V(t)$, il existe $\delta > 0$ tel que $\operatorname{Supp}(1-\chi) \subset \overline{\Omega} \setminus B(0,\delta)$. Considérons la fonction μ définie dans le Lemme II.9 et notons $m = \inf_{\overline{\Omega} \setminus B(0,\delta)} \mu > 0$. Remarquons que m ne dépend que de φ, Ω, n.

D'après (II.34), il existe $C_0 = C_0(\varphi, \Omega, n) > 0$ tel que:

$$\|(1-\chi)u\|_0^2 = \int_{\overline{\Omega} \setminus B(0,\delta)} u^2\, dx \leq \frac{1}{m} \int \mu u^2\, dx \leq C_0 \|L_\nu u\|_0 \|u\|_0. \tag{II.42}$$

Puisque $\operatorname{Supp} \chi_2 \subset \overline{\Omega} \setminus \{0\}$ on a de même

$$\|\chi_2 u\|_0^2 \leq C_1 \|L_\nu u\|_0 \|u\|_0. \tag{II.43}$$

D'autre part d'après (II.35)

$$\|\chi u\|_0^2 \leq C_2 \|L_\nu \chi u\|_0^2 \leq C_2(\|L_\nu u\|_0^2 + \|[\chi, L_\nu]u\|_0^2). \tag{II.44}$$

Or on a $\chi_1 L_\nu \chi_2 u = \chi_1 L_\nu u$ et $[\chi, L_\nu]u = [\chi, \chi_1 L_\nu]\chi_2 u$, d'où d'après le Lemme II.11 et comme $A(2) \leq M_0$ et $\nu \leq 1$:

$$\begin{aligned} \|[\chi, L_\nu]u\|_0^2 = \|[\chi, \chi_1 L_\nu]\chi_2 u\|_0^2 &\leq C(\|\chi_1 L_\nu \chi_2 u\|_0^2 + (M_0+1)^2 \|\chi_2 u\|_0^2) \\ &\leq C'(\|L_\nu u\|_0^2 + \|\chi_2 u\|_0^2). \end{aligned} \tag{II.45}$$

En combinant (II.42) à (II.45) on obtient (II.29).

Preuve de (II.30). On a $\operatorname{supp}(1-\chi) \subset \overline{\Omega} \setminus B(0,\delta)$. Or φ est strictement convexe sur le support de $(1-\chi)$, donc L est uniformément elliptique sur cet ensemble. D'après (II.32) et le fait que $A(2) \le M_0$ on a

$$\|(1-\chi)u\|_1 \le C_1'(\|L_\nu u\|_0 + (M_0+1)\|u\|_0 + \|[\chi, L_\nu]u\|_0).$$

En appliquant le Lemme II.11 on obtient:

$$\|[\chi, L_\nu]u\|_0 \le C_0(\|L_\nu u\|_0 + (M_0+1)\|u\|_0).$$

On en déduit

$$\|(1-\chi)u\|_1 \le C_1(M_0)(\|L_\nu u\|_0 + \|u\|_0). \tag{II.46}$$

D'autre part (II.41) et $A(2) \le M_0$ impliquent:

$$\|\chi u\|_1 \le C(M_0)(\|L_\nu u\|_1 + \|[\chi, L_\nu]\|_1 + \|u\|_0).$$

Comme $[\chi, L_\nu]u = [\chi, \chi_1 L_\nu]\chi_2 u$ et $\chi_1 L_\nu \chi_2 u = \chi_1 L_\nu u$, le Lemme II.11 et $A(2) \le M_0$ donnent:

$$\begin{aligned}\|[\chi, L_\nu]u\|_1 &\le C_1(\|\chi_1 L_\nu \chi_2 u\|_1 + (1+M_0)\|\chi_2 u\|_1)\\ &\le C_1(\|L_\nu u\|_1 + (M_0+1)\|\chi_2 u\|_1).\end{aligned}$$

Or L est uniformément elliptique sur le support de χ_2, on a donc d'après (II.32) et $A(2) \le M_0$:

$$\|\chi_2 u\|_1 \le C_1'(\|L_\nu u\|_0 + (M_0+1)\|u\|_0 + \|[\chi_2, L_\nu]u\|_0)$$

et en utilisant (II.38) on a:

$$\|[\chi_2, L_\nu]u\|_0 \le C(M_0)(\|L_\nu u\|_0 + \|u\|_0),$$

d'où

$$\|\chi u\|_1 \le C_1(M_0)(\|L_\nu u\|_1 + \|u\|_0). \tag{II.47}$$

(II.46) et (II.47) donnent (II.30). □

Preuve de (II.31). Elle est identique à celle de (II.30) et s'obtient en utilisant les inégalités (II.33), (II.40) et (II.41). □

II.3. **Schéma itératif du type Nash-Moser.** Dans ce paragraphe on va utiliser un schéma itératif du type Nash-Moser et les résultats du paragraphe II.2 pour prouver le Théorème A.

Il est auparavant nécessaire de fixer les constantes ε_0 et M_0 apparaissant dans Théorèmes A et (II.6).

On pose

$$M_0 = 1 + \max_{1\le i,j\le n} K_3\left(2, \kappa, \frac{\partial F}{\partial u_{ij}}, (1+|\varphi|_2)\right)(1+|\varphi|_{4,\kappa}) \tag{II.48}$$

où K_3 est la constante intervenant dans l'inégalité (II.21). M_0 étant fixé on pose

$$D = \max\left(\max_{0\le s\le s_*} C_s, 1\right) \tag{II.49}$$

où C_s est la constante (ne dépendant que de s, φ, Ω, M_0) déterminée dans le Théorème II.6. Ensuite

$$\mu = \max(\beta, 3Ds_*^2(1+|\varphi|_{s_*+2,\kappa}), 2^{1/\kappa}) \text{ et } \overline{\mu} = \beta^2\mu^{s_*}, \tag{II.50}$$

puis

$$\text{(II.51)} \qquad \begin{cases} a_1 = 9K_0\mu^5, \\ a_2 = 5a_1\mu^{s_*+1}, \\ a_3 = 7K_0\mu^5, \end{cases}$$

où K_0 est la constante déterminée dans la Proposition II.5.

Enfin on fixe $\overline{\varepsilon}$ vérifiant

$$\text{(II.52)} \qquad \overline{\varepsilon} \leq \inf_{1\leq i\leq 4}(1, \varepsilon_i)$$

où les ε_i sont déterminés dans les Lemme II.2, Proposition II.3, Théorème II.6 et la preuve de (II.30), de plus

$$\text{(II.53)} \qquad \overline{\varepsilon} \leq (3D^2a_2 + 6\overline{\mu}D^2)^{-2}.$$

Ces contraintes étant déterminées, soit $f \in C^{s_*}(\Omega)$ telle que

$$\text{(II.54)} \qquad |\det \varphi_{ij} - f|_{s_*} \leq \overline{\varepsilon}^2.$$

Le ε_0 mentionné dans le Théorème A est alors égal à $\overline{\varepsilon}^2$. Le schéma formel de la méthode est le suivant. On pose tout d'abord pour $n \in \mathbb{N}, \mu_n = \mu^n$ où μ est défini dans (II.50) puis $S_n = S\mu_n$, l'opérateur de lissage défini dans le paragraphe C. Ensuite pour $n \in \mathbb{N}$

$$\text{(II.55)} \qquad u_0 = 0, w_0 = 0, w_{n+1} = w_n + u_{n+1}, \quad n \geq 0,$$

u_{n+1} étant la solution du problème de Dirichlet

$$\text{(II.56)}_{n+1} \qquad L_G(\tilde{w}_n)u_{n+1} + \theta_n\Delta u_{n+1} = f_n \text{ dans } \Omega, \quad u_{n+1}|_{\partial\Omega} = 0,$$

où

$$\text{(II.57)} \qquad \tilde{w}_n = S_n w_n,$$

$$\text{(II.58)} \qquad \theta_n = |G(\tilde{w}_n)|_0,$$

$$\text{(II.59)} \qquad f_0 = -S_0G(0), \ f_n = S_{n-1}R_{n-1} - S_nR_n + S_{n-1}G(0) - S_nG(0),$$

$$\text{(II.60)} \qquad R_0 = 0, \quad R_n = \sum_{j=1}^{n} r_j,$$

$$\text{(II.61)} \qquad r_0 = 0, \ r_j = [L_G(w_{j-1}) - L_G(\tilde{w}_{j-1})]u_j + Q_j - \theta_{j-1}\Delta u_j, \ 1 \leq j \leq n,$$

$$\text{(II.62)} \qquad Q_j = G(w_j) - G(w_{j-1}) - L_G(w_{j-1})u_j, \quad 1 \leq j \leq n.$$

Ce schéma formel est cohérent puisque la connaissance de u_j pour $1 \leq j \leq n$ détermine celle de w_n donc de $\tilde{w}_n$ et θ_n puis celle de r_j pour $1 \leq j \leq n$ donc celle de R_n et de f_n, $(\text{II.56})_{n+1}$ permet alors de déterminer u_{n+1}. L'existence de la suite u_n et la convergence de w_n vers une solution w de $G(w) = 0, w|_{\partial\Omega} = 0$, découleront de la proposition suivante.

Proposition II.12. *Soit s_* un entier, $s_* \geq 7 + n$. Fixons σ tel que $4 + n + 2\kappa \leq \sigma < s_* - 2$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, le problème* $(\text{II.56})_{n+1}$ *admet une solution unique*

$u_{n+1} \in H^{s_*}(\Omega)$. *De plus pour tout* $s \in \mathbb{N}$ *on a*:

$$\|u_j\|_s \leq \sqrt{\overline{\varepsilon}}[\max(\mu, \mu_{j-1})]^{s-\sigma}, \quad j \in \mathbb{N}^*, \quad 0 \leq s \leq s_*, \tag{II.63$_j$}$$

$$\|w_j\|_s \leq \begin{cases} 2\sqrt{\overline{\varepsilon}}, & s \leq \sigma - \kappa, \\ \sqrt{\overline{\varepsilon}}\mu_j^{s-\sigma}, & \sigma + \kappa \leq s \leq s_*, \end{cases}, \quad j \in \mathbb{N}^*, \tag{II.64$_j$}$$

$$|\tilde{w}_j|_{4,\kappa} \leq 1, \quad j \in \mathbb{N}^*, \tag{II.65$_j$}$$

$$\|w_j - \tilde{w}_j\|_s \leq 2\beta\sqrt{\overline{\varepsilon}}\mu_j^{s-\sigma}, \quad 0 \leq s \leq s_*, \quad j \in \mathbb{N}^*, \tag{II.66$_j$}$$

$$\|r_j\|_s \leq \overline{\varepsilon}a_1[\max(\mu, \mu_{j-1})]^{s-\sigma}, \quad 0 \leq s \leq s_* - 2, \quad j \in \mathbb{N}^*, \tag{II.67$_j$}$$

$$f_j \in H^{s_*} \text{ et } \|f_j\|_s \leq \overline{\varepsilon}a_2\mu_j^{s-\sigma}, \quad 0 \leq s \leq s_*, \quad j \in \mathbb{N}, \tag{II.68$_j$}$$

$$\theta_j \leq a_3\sqrt{\overline{\varepsilon}}\mu_j^{-2} \leq 1, \quad j \in \mathbb{N}, \tag{II.69$_j$}$$

$$A_j(2) \leq M_0, \quad j \in \mathbb{N}. \tag{II.70$_j$}$$

Preuve. On a $u_0 = 0$, montrons que les inégalités (II.68)$_0$ à (II.70)$_0$ sont vérifiées.

a) (II.68)$_0$: D'après (II.8) et (II.59) on a:

$$f_0 = -S_0G(0) \text{ et } G(0) = \frac{1}{\overline{\varepsilon}}(\det \varphi_{ij} - f).$$

Or $\varphi \in C^{s_*+2,\alpha}(\Omega), f \in C^{s_*}(\Omega)$ et les S_n sont infiniment régularisants donc $f_0 \in H^{s_*}(\Omega)$. D'autre part d'après (II.8), (II.15), (II.18) et (II.54) on a:

$$\|f_0\|_s \leq \beta\|G(0)\|_s \leq \frac{\beta}{\overline{\varepsilon}}\|\det \varphi_{ij} - f\|_{s_*} \leq \frac{\beta^2}{\overline{\varepsilon}}|\det \varphi_{ij} - f|_{s_*} \leq \beta^2\overline{\varepsilon}.$$

(II.51) et $\beta \leq \mu$ impliquent:

$$\|f_0\|_s \leq \mu^2\overline{\varepsilon} \leq a_2\overline{\varepsilon}.$$

b) (II.69)$_0$: (II.8), (II.51), (II.53) et (II.54) donnent:

$$\theta_0 = |G(0)|_0 \leq \frac{1}{\overline{\varepsilon}}|\det \varphi_{ij} - f|_{s_*} \leq \overline{\varepsilon} \leq \sqrt{\overline{\varepsilon}}a_3 \leq 1.$$

c) (II.70)$_0$: On a $A_0(2) = \max(1, \max_{1\leq i,j\leq n} |\frac{\partial F}{\partial \varphi_{ij}}(\varphi_{pq})|_2 + \theta_0)$. (II.13), (II.48) et (II.69) impliquent $A_0(2) \leq M_0$.

Supposons que l'on ait construit $u_0, u_1, \ldots, u_{n-1} \in H^{s_*}(\Omega)$ vérifiant (II.29) à (II.31) et que l'on ait montré les inégalités (II.63)$_j$ à (II.70)$_j$ pour $0 \leq j \leq n-1$. On va alors construire $u_n \in H^{s_*}(\Omega)$ vérifiant (II.29) à (II.31) puis montrer que (II.63)$_n$ à (II.70)$_n$ sont vérifiées. Il résulte de (II.72)$_{n-1}$ à (II.79)$_{n-1}$ que $|\tilde{w}_{n-1}|_{4,\kappa} \leq 1, \theta_{n-1} \leq 1, A_{n-1}(2) \leq M_0$ et $f_{n-1} \in H^{s_*}(\Omega)$. On peut donc appliquer le Théorème II.6 et obtenir la solution $u_n \in H^{s_*}(\Omega)$ de (II.56)$_n$ vérifiant (II.29) à (II.31). Ensuite:

a) (II.63)$_n$: • Cas $n = 1$: D'après (II.15), (II.18), (II.29), (II.49) et (II.54) on a

$$\|u_1\|_0 \leq D\|f_0\|_0 \leq D\beta\|G(0)\|_0 \leq D\frac{\beta^2}{\overline{\varepsilon}}|\det \varphi_{ij} - f|_{s_*} \leq D\beta^2\overline{\varepsilon}.$$

(II.50), (II.53) et $s_* \geq \sigma$ impliquent

$$\|u_1\|_0 \leq D\overline{\mu\varepsilon}\mu^{-s_*} \tag{II.71}$$

puis

$$\|u_1\|_0 \leq \sqrt{\overline{\varepsilon}}\mu^{-\sigma}.$$

Il résulte de (II.30) que:

$$\|u_1\|_1 \leq D(\|f_0\|_1 + \|u_1\|_0).$$

On a alors d'après (II.71), $(\text{II}.68)_0$ et $s_* \geq \sigma$:

$$\|u_1\|_1 \leq D(\beta^2\overline{\varepsilon} + D\overline{\mu\varepsilon}\mu^{-\sigma}) \leq 2D^2\overline{\mu\varepsilon}\mu^{-\sigma}.$$

Donc en utilisant (II.53) on obtient

$$\|u_1\|_1 \leq \sqrt{\overline{\varepsilon}}\mu^{1-\sigma}.$$

Supposons que l'on ait pour $0 \leq l < s$, $s \geq 2$:

$$\|u_1\|_l \leq \sqrt{\overline{\varepsilon}}\mu^{l-\sigma}, \tag{II.72}$$

montrons que $\|u_1\|_s \leq \sqrt{\overline{\varepsilon}}\mu^{s-\sigma}$.

D'après (II.31) on a pour $s \geq 2$:

$$\|u_1\|_s \leq D\left(\|f_0\|_s + \sum_{\substack{(i,l)\in\Lambda_s \\ l\leq s-1}} (1 + |\varphi|_{i+4,\kappa})\|u_1\|_l\right) \tag{II.73}$$

(II.15), (II.18), (II.50), (II.54), (II.59) et $s_* + s \geq \sigma$ impliquent

$$\|f_0\|_s \leq \beta\|G(0)\|_s \leq \beta^2|G(0)|_{s_*} \leq \beta^2\overline{\varepsilon} = \overline{\mu}\mu^{-s_*}\overline{\varepsilon} \leq \overline{\mu\varepsilon}\mu^{s-\sigma}. \tag{II.74}$$

En utilisant (II.72), (II.73) on obtient:

$$\begin{aligned}\|u_1\|_s &\leq D\left(\overline{\mu\varepsilon}\mu^{s-\sigma} + \sum_{\substack{(i,l)\in\Lambda_s \\ l\leq s-1}} (1 + |\varphi|_{s_*+2,\kappa})\sqrt{\overline{\varepsilon}}\mu^{l-\sigma}\right) \\ &\leq D\left(\overline{\mu\varepsilon}\mu^{s-\sigma} + s_*^2(1 + |\varphi|_{s_*+2,\kappa})\mu^{-1}\sqrt{\overline{\varepsilon}}\mu^{s-\sigma}\right)\end{aligned}$$

(II.50) et (II.53) impliquent alors

$$\|u_1\|_s \leq \sqrt{\overline{\varepsilon}}\mu^{s-\sigma}.$$

- Cas $n \geq 2$: (II.29) et (II.49), (II.53) et $(\text{II}.68)_{n-1}$ impliquent

$$\|u_n\|_0 \leq D\|f_{n-1}\|_0 \leq D\overline{\varepsilon}a_2\mu_{n-1}^{-\sigma} \leq \sqrt{\overline{\varepsilon}}\mu_{n-1}^{-\sigma} \tag{II.75}$$

De même (II.30), (II.49), (II.53), $(\text{II}.68)_{n-1}$ et (II.75) donnent

$$\|u_n\|_1 \leq \sqrt{\overline{\varepsilon}}\mu_{n-1}^{1-\sigma}.$$

Supposons que l'on ait pour $0 \leq l < s$, $s \geq 2$

$$\|u_n\|_l \leq \sqrt{\overline{\varepsilon}}\mu_{n-1}^{l-\sigma}. \tag{II.76}$$

D'après (II.31) on a

$$\|u_n\|_s \leq D\left(\|f_{n-1}\|_s + \sum_{\substack{(i,l)\in\Lambda_s \\ l\leq s-1}} (1 + |\varphi + \overline{\varepsilon}\tilde{w}_{n-1}|_{i+4,\kappa})\|u\|_l\right). \tag{II.77}$$

(II.13), (II.16), $(\text{II}.64)_{n-1}$ et $5 + [n_*] \leq \sigma - \kappa$ impliquent pour $0 \leq i \leq s-2$

$$|\tilde{w}_{n-1}|_{i+4,\kappa} \leq \beta\|\tilde{w}_{n-1}\|_{4+n_*+i} \leq \beta\mu_{n-1}^i\|w_{n-1}\|_{4+n_*} \leq 2\beta^2\sqrt{\overline{\varepsilon}}\mu_{n-1}^i. \tag{II.78}$$

On obtient alors en utilisant (II.76), (II.77) et (II.78)

$$\begin{aligned}\|u_n\|_s &\le D\left(\overline{\varepsilon}a_2\mu_{n-1}^{s-\sigma} + \sum_{\substack{(i,l)\in\Lambda_s\\ l\le s-1}} (1+|\varphi|_{s_*+2,\kappa} + 2\beta^2\sqrt{\overline{\varepsilon}}\mu_{n-1}^{i})\sqrt{\overline{\varepsilon}}\mu_{n-1}^{l-\sigma}\right)\\ &\le D\left(\overline{\varepsilon}a_2\mu_{n-1}^{s-\sigma} + 2s_*^2\beta^2\overline{\varepsilon}\mu_{n-1}^{s-\sigma} + (|\varphi|_{s_*+2,\kappa}+1)s_*^2\sqrt{\overline{\varepsilon}}\mu_{n-1}^{s-1-\sigma}\right)\end{aligned}$$

(II.50) et (II.53) impliquent alors:

$$\|u_n\|_s \le \sqrt{\overline{\varepsilon}}\mu_{n-1}^{s-\sigma}.$$

b) (II.64)$_n$: (II.55) implique que $w_n = \sum_{j=1}^n u_j$. D'après (II.63)$_j$, $1\le j\le n$ on a

$$\|w_n\|_s \le \sum_{j=1}^n \|u_j\|_s \le \sqrt{\overline{\varepsilon}}\mu^{s-\sigma} + \sum_{j=2}^n \sqrt{\overline{\varepsilon}}\mu_{j-1}^{s-\sigma} \le \sqrt{\overline{\varepsilon}}\mu^{s-\sigma} + \sum_{j=1}^{n-1}\sqrt{\overline{\varepsilon}}\mu_j^{s-\sigma}.$$

• si $s\le\sigma-\kappa$, comme $\mu\ge 2^{1/\kappa}\ge 2$ alors $\mu_j^{s-\sigma}\le\mu_j^{-\kappa}\le\frac{1}{2^j}$ et

$$\|w_n\|_s \le \sum_{j=0}^{n-1}\sqrt{\overline{\varepsilon}}\mu_j^{s-\sigma} \le \sqrt{\overline{\varepsilon}}\sum_{j=0}^{n-1}\frac{1}{2^j} \le 2\sqrt{\overline{\varepsilon}}.$$

• si $s\ge\sigma+\kappa$: on a

$$\|w_n\|_s \le \sqrt{\overline{\varepsilon}}\mu^{s-\sigma} + \sqrt{\overline{\varepsilon}}\frac{(\mu^{n(s-\sigma)}-\mu^{s-\sigma})}{\mu^{s-\sigma}-1}.$$

Or $\mu\ge 2^{1/\kappa}$ donc $\mu^{s-\sigma}\ge\mu^{\kappa}\ge 2$ et on obtient

$$\|w_n\|_s \le \sqrt{\overline{\varepsilon}}\mu_n^{s-\sigma}.$$

c) (II.65)$_n$: D'après (II.13), (II.15), (II.53), (II.64)$_n$ et $5+[n_*]\le\sigma-\kappa$ on a

$$|\tilde{w}_n|_{4,\kappa} \le \beta\|\tilde{w}_n\|_{4+n_*} \le \beta^2\|w_n\|_{4+n_*} \le 2\beta^2\sqrt{\overline{\varepsilon}} \le 1.$$

d) (II.66)$_n$: si $s\le\sigma+\kappa$, (II.17) et (II.64)$_n$ impliquent:

$$\begin{aligned}\|w_n-\tilde{w}_n\|_s &\le \beta\mu_n^{s-[\sigma+\kappa]-1}\|w_n\|_{[\sigma+\kappa]+1}\\ &\le \beta\mu_n^{[\sigma+\kappa]-1}\sqrt{\overline{\varepsilon}}\mu_n^{s-[\sigma+\kappa]+1-\sigma} \le \beta\sqrt{\overline{\varepsilon}}\mu_n^{s-\sigma}.\end{aligned}$$

• si $s>\sigma+\kappa$: (II.15), (II.64)$_n$ et $\beta\ge 1$ donnent

$$\|w_n-\tilde{w}_n\|_s \le 2\beta\|w_n\|_s \le 2\beta\sqrt{\overline{\varepsilon}}\mu_n^{s-\sigma}.$$

e) (II.67)$_n$: D'après (II.61) on a:

$$r_n = \underbrace{[L_G(w_{n-1})-L_G(\tilde{w}_{n-1})]u_n}_{(1)} - \underbrace{\theta_{n-1}\Delta u_n}_{(2)} + \underbrace{Q_n}_{(3)}.$$

Etudions d'abord (1). Dans le cas $n=1$, $(1)=0$.
• Cas $n\ge 2$:

$$(1) = \int_0^1 \frac{d}{dt}[L_G(\tilde{w}_{n-1}+t(w_{n-1}-\tilde{w}_{n-1}))u_n]\,dt.$$

D'après (II.13), (II.66)$_{n-1}$ on a

$$|w_{n-1}-\tilde{w}_{n-1}|_2 \le \beta\|w_{n-1}-\tilde{w}_{n-1}\|_{2+n_*} \le 2\beta^2\sqrt{\overline{\varepsilon}}\mu_{n-1}^{3+[n_*]-\sigma}$$

$2\beta^2\sqrt{\overline{\varepsilon}} \leq 1$ et $3+[n_*] \leq 4+2n_* \leq \sigma$ impliquent alors $|w_{n-1}-\tilde{w}_{n-1}|_2 \leq 1$. De même (II.13), (II.53) et $(\text{II.63})_n$ donnent

$$|u_n|_2 \leq \beta\|u_n\|_{2+n_*} \leq \sqrt{\overline{\varepsilon}}\beta\mu_{n-1}^{3+[n_*]-\sigma} \leq 1$$

et $(\text{II.65})_{n-1}$, $|\tilde{w}_{n-1}|_2 \leq 1$.

On peut donc appliquer la Proposition II.5 et on obtient

$$\begin{aligned}\|(1)\|_s \leq \overline{\varepsilon}K_0[(\|\varphi\|_{s+2}+\|\tilde{w}_{n-1}\|_{s+2}+\|w_{n-1}\|_{s+2}+1)|w_{n-1}-\tilde{w}_{n-1}|_2|u_n|_2 \\ +(\|\varphi\|_{2+n}+\|\tilde{w}_{n-1}\|_{2+n_*}+\|w_{n-1}\|_{2+n_*}+1) \\ \times(|w_{n-1}-\tilde{w}_{n-1}|_2\|u_n\|_{s+2}+\|w_{n-1}-\tilde{w}_{n-1}\|_{s+2}|u_n|_2].\end{aligned}$$

D'après (II.18) et (II.50) on a pour $0 \leq s \leq s_*$

$$\|\varphi\|_{s+2} \leq \beta|\varphi|_{s_*+2} \leq \beta\mu \leq \mu^2.$$

D'après (II.14) il suffit de prouver $(\text{II.67})_n$ pour $s=0$ et $s=s_*-2$.

• $s=0$: (II.13), (II.14), $(\text{II.63})_n$, $(\text{II.64})_{n-1}$ et $(\text{II.66})_{n-1}$ impliquent

$$\begin{aligned}\|(1)\|_0 \leq \overline{\varepsilon}K_0[(\mu^2+2\beta\sqrt{\overline{\varepsilon}}+2\sqrt{\overline{\varepsilon}}+1)2\beta^5\overline{\varepsilon}\mu_{n-1}^{4+2n_*-2\sigma} \\ +(\mu^2+2\beta\sqrt{\overline{\varepsilon}}+2\sqrt{\overline{\varepsilon}}+1)4\beta^3\overline{\varepsilon}\mu_{n-1}^{4+n_*-2\sigma}].\end{aligned}$$

D'apreś (II.53) et $\sigma \geq 4+2n_* \geq 4+n_*$ on obtient

$$\|(1)\|_0 \leq \overline{\varepsilon}K_0\mu_{n-1}^{-\sigma}.$$

• $s=s_*-2$: D'après (II.53) et $s_* \geq \sigma+\kappa$ on obtient comme dans le cas précédent:

$$\|(1)\|_{s_*-2} \leq \overline{\varepsilon}K_0\mu_{n-1}^{s_*-2-\sigma}.$$

En utilisant (II.14) on obtient pour $0 \leq s \leq s_*-2$

$$\|(1)\|_s \leq K_0\beta\mu_{n-1}^{s-\sigma}. \tag{II.79}$$

D'autre part d'après $(\text{II.63})_n$ et $(\text{II.69})_{n-1}$ on a

$$\|(2)\|_s \leq \theta_{n-1}\|u_n\|_{s+2}.$$

• si $n=1$: (II.53), (II.54), (II.58) et $(\text{II.63})_j$ impliquent

$$\|(2)\|_s \leq |G(0)|_0\|u_1\|_{s+2} \leq \overline{\varepsilon}\sqrt{\overline{\varepsilon}}\mu^{s+2-\sigma} \leq \overline{\varepsilon}\mu^{s-\sigma}. \tag{II.80}$$

• si $n \geq 2$: $(\text{II.63})_n$ et $(\text{II.69})_{n-1}$ impliquent

$$\|(2)\|_s \leq a_3\overline{\varepsilon}\mu_{n-1}^{-2}\mu_{n-1}^{s+2-\sigma} \leq a_3\overline{\varepsilon}\mu_{n-1}^{s-\sigma}. \tag{II.81}$$

Enfin d'après (II.62):

$$\begin{aligned}(3)=Q_n &= G(w_{n-1}+u_n)-G(w_{n-1})-L_G(w_{n-1})u_n \\ &= \int_0^1\left(\int_0^t \frac{d}{d\tau}[L_G(w_{n-1}+\tau u_n)u_n]\,d\tau\right)\,dt.\end{aligned}$$

D'après (II.13), (II.53) et $(\text{II.64})_{n-1}$ on a

$$|w_{n-1}|_2 \leq \|w_{n-1}\|_{2+n_*} \leq 2\beta\sqrt{\overline{\varepsilon}} \leq 1.$$

Comme on a aussi déjà montré que $|u_n|_2 \leq 1$, on peut appliquer la Proposition II.5 et on obtient

$$\begin{aligned}\|(3)\|_s \leq \overline{\varepsilon}K_0[(\|\varphi\|_{s+2}+\|u_n\|_{s+2}+\|w_{n-1}\|_{s+2}+1)|u_n|_2^2 \\ +2|u_n|_2\|u_n\|_{s+2}(\|\varphi\|_{2+n_*}+\|u_n\|_{2+n_*}+\|w_{n-1}\|_{2+n_*}+1)].\end{aligned}$$

(II.13), (II.14), $(\text{II}.63)_n$ et $(\text{II}.64)_{n-1}$ impliquent

• si $s = 0$:

$$\|(3)\|_0 \leq \overline{\varepsilon} K_0 [(\mu^2 + \sqrt{\overline{\varepsilon}}[\max(\mu, \mu_{n-1})]^{2-\sigma} + 2\sqrt{\overline{\varepsilon}} + 1)\beta^4 \overline{\varepsilon} [\max(\mu, \mu_{n-1})]^{4+2n_*-2\sigma} + 2(\mu^2 + \sqrt{\overline{\varepsilon}}\beta [\max(\mu, \mu_{n-1})]^{2+n_*-\sigma} + 2\sqrt{\overline{\varepsilon}} + 1)\overline{\varepsilon}\beta^2 [\max(\mu, \mu_{n-1})]^{4+n_*-2\sigma}].$$

D'après (II.53) et $\sigma \geq 4 + 2n_*$ on obtient alors

$$\|(3)\|_0 \leq \overline{\varepsilon} K_0 [\max(\mu, \mu_{n-1})]^{-\sigma}.$$

• si $s = s_* - 2$, on obtient aussi comme $\sigma \geq 4 + 2n_*$

$$\|(3)\|_{s_*-2} \leq \varepsilon K_0 [\max(\mu, \mu_{n-1})]^{s_*-2-\sigma}.$$

D'après (II.14) on a pour $0 \leq s \leq s_* - 2$

$$\|(3)\|_s \leq K_0 \beta \overline{\varepsilon} [\max(\mu, \mu_{n-1})]^{s-\sigma}. \tag{II.82}$$

(II.79), (II.80), (II.81) et (II.82) impliquent alors:

$$\begin{aligned}\|r_n\|_s \leq (2K_0\beta + a_3)\overline{\varepsilon}[\max(\mu, \mu_{n-1})]^{s-\sigma} &\leq 9K_0\mu^5 \overline{\varepsilon}[\max(\mu, \mu_{n-1})]^{s-\sigma} \\ &= a_1 \overline{\varepsilon} [\max(\mu, \mu_{n-1})]^{s-\sigma}.\end{aligned}$$

f) $(\text{II}.68)_n$: D'après (II.68) et (II.69) on a:

$$\begin{aligned} f_n &= S_{n-1}R_{n-1} - S_n R_n + (S_{n-1} - S_n)G(0) \\ &= \underbrace{(S_{n-1}R_{n-1} - S_n R_{n-1})}_{(1)} - \underbrace{S_n r_n}_{(2)} + \underbrace{(S_{n-1} - S_n)G(0)}_{(3)}. \end{aligned}$$

• Cas $s = 0$: (II.17), (II.69) et $(\text{II}.76)_n$ impliquent

$$\begin{aligned} \|(1)\|_0 &\leq \|(I - S_{n-1})R_{n-1}\|_0 + \|(I - S_n)R_{n-1}\|_0 \\ &\leq \beta \|R_{n-1}\|_{s_*-2} \mu_{n-1}^{2-s_*} + \beta \mu_n^{2-s_*} \|R_{n-1}\|_{s_*-2} \\ &\leq \beta a_1 \overline{\varepsilon} \mu_{n-1}^{2-s_*} \left(\mu^{s_*-2-\sigma} + \sum_{j=2}^{n-1} \mu_{j-1}^{s_*-2-\sigma} \right) \\ &\quad + \beta a_1 \overline{\varepsilon} \mu_n^{2-s_*} \left(\mu^{s_*-2-\sigma} + \sum_{j=2}^{n-1} \mu_{j-1}^{s_*-2-\sigma} \right). \end{aligned}$$

Or $s_* - 2 > \sigma$ et $\beta \leq \mu$ donc

$$\begin{aligned} \|(1)\|_0 &\leq \beta a_1 \overline{\varepsilon} (\mu_{n-1}^{2-s_*} \mu_{n-1}^{s_*-2-\sigma} + \mu_n^{2-s_*} \mu_n^{s_*-2-\sigma}) \\ &\leq 2a_1 \beta \mu^{s_*-2} \overline{\varepsilon} \mu_n^{-\sigma} \leq 2a_1 \mu^{s_*-1} \overline{\varepsilon} \mu_n^{-\sigma}. \end{aligned} \tag{II.83}$$

D'autre part d'après (II.15), $(\text{II}.67)_n$, $\sigma < s_* - 2$ et $\beta \leq \mu$ on a:

$$\|(2)\|_0 \leq \beta \|r_n\|_0 \leq \beta \overline{\varepsilon} a_1 [\max(\mu, \mu_{n-1})]^{-\sigma} \leq (\beta a_1 \mu^\sigma) \overline{\varepsilon} \mu_n^{-\sigma} \leq a_1 \mu^{s_*-1} \overline{\varepsilon} \mu_n^{-\sigma}.$$

Ensuite (II.17), (II.18), (II.54) et $\sigma < s_* - 2$ donnent:

$$\begin{aligned} \|(3)\|_0 &\leq \|(I - S_{n-1})G(0)\|_0 + \|(I - S_n)G(0)\|_0 \\ &\leq \beta \mu_{n-1}^{-\sigma} \|G(0)\|_\sigma + \beta \mu_n^{-\sigma} \|G(0)\|_\sigma \\ &\leq \beta^2 \mu_{n-1}^{-\sigma} |G(0)|_{s_*} + \beta^2 \mu_n^{-\sigma} |G(0)|_{s_*} \\ &\leq \beta^2 \overline{\varepsilon} \mu_n^{-\sigma} (\mu^\sigma + 1) \leq 2\mu^{s_*} \overline{\varepsilon} \mu_n^{-\sigma}. \end{aligned}$$

On obtient finalement

$$\|f_n\|_0 \le (2+3a_1)\mu^{s_*}\overline{\varepsilon}\mu_n^{-\sigma}. \tag{II.84}$$

• Cas $s=s_*$: D'après (II.16), (II.60) et $(\mathrm{II}.67)_j$, $1\le j\le n$ et $\sigma<s_*-2$ on a:

$$\begin{aligned}
\|(1)+(2)\|_{s_*} &\le \|S_{n-1}R_{n-1}\|_{s_*}+\|S_nR_n\|_{s_*}\\
&\le \beta\mu_{n-1}^2\|R_{n-1}\|_{s_*-2}+\beta\mu_n^2\|R_n\|_{s_*-2}\\
&\le \beta\mu_{n-1}^2a_1\overline{\varepsilon}\left(\mu^{s_*-2-\sigma}+\sum_{j=2}^{n-1}\mu_{j-1}^{s_*-2-\sigma}\right)\\
&\quad+\beta\mu_n^2a_1\overline{\varepsilon}\left(\mu^{s_*-2-\sigma}+\sum_{j=2}^{n}\mu_{j-1}^{s_*-2-\sigma}\right)\\
&\le \beta a_1\overline{\varepsilon}(\mu_{n-1}^2\mu_{n-1}^{s_*-2-\sigma}+\mu_n^2\mu_n^{s_*-2-\sigma})\\
&\le 2\beta a_1\overline{\varepsilon}\mu_n^{s_*-\sigma}\le 2\mu a_1\overline{\varepsilon}\mu_n^{s_*-\sigma}.
\end{aligned}$$

D'autre part (II.16), (II.18), (II.54) et $\beta\le\mu$ impliquent:

$$\begin{aligned}
\|(3)\|_{s_*} &\le \|S_nG(0)\|_{s_*}+\|S_{n-1}G(0)\|_{s_*}\\
&\le \beta\mu_n^{s_*-\sigma}\|G(0)\|_\sigma+\beta\mu_{n-1}^{s_*-\sigma}\|G(0)\|_\sigma\\
&\le 2\beta^2\overline{\varepsilon}\mu_n^{s_*-\sigma}\le 2\mu^2\overline{\varepsilon}\mu_n^{s_*-\sigma}
\end{aligned}$$

d'où

$$\|f_n\|_{s_*}\le 2\mu(a_1+\mu)\overline{\varepsilon}\mu_n^{s_*-\sigma}. \tag{II.85}$$

Finalement d'après (II.14), (II.84), (II.85) et $\mu\le a_1$ on obtient

$$\|f_n\|_s\le 5\beta a_1\mu^{s_*}\overline{\varepsilon}\mu_n^{s-\sigma}\le 5a_1\mu^{s_*+1}\overline{\varepsilon}\mu_n^{s-\sigma}=a_2\overline{\varepsilon}\mu_n^{s-\sigma}.$$

g) $(\mathrm{II}.69)_n$: D'après (II.58) on a

$$\theta_n=|G(\tilde w_n)|_0\le|G(w_n)-G(\tilde w_n)|_0+|G(w_n)|_0.$$

D'autre part $(\mathrm{II}.56)_n$ à (II.62) impliquent:

$$G(w_n)=(I-S_{n-1})R_{n-1}+(I-S_{n-1})G(0)+r_n,$$

donc

$$\theta_n\le\underbrace{|G(w_n)-G(\widetilde w_n)|_0}_{(1)}+\underbrace{|(I-S_{n-1})R_{n-1}|_0}_{(2)}+\underbrace{|(I-S_{n-1})G(0)|_0}_{(3)}+\underbrace{|r_n|_0}_{(4)}.$$

D'après un calcul précédent on a $|w_n|_2\le1$ et $|\tilde w_n|_2\le1$, on peut donc appliquer la Proposition II.5 et on obtient:

$$(1)\le\beta K_0\|w_n-\tilde w_n\|_{2+n_*}(\|\varphi\|_{2+n_*}+\|w_1\|_{2+n_*}+\|\tilde w_n\|_{2+n_*}).$$

(II.14), $(\mathrm{II}.64)_n$, $(\mathrm{II}.6)_n$ et $3+[n_*]\le4+2n_*-\kappa\le\sigma-\kappa$ donnent

$$(1)\le2\beta^3K_0\sqrt{\overline{\varepsilon}}\mu_n^{2+n_*-\sigma}(\mu^2+2\sqrt{\overline{\varepsilon}}+2\beta\sqrt{\overline{\varepsilon}}).$$

Or $\overline{\varepsilon}\le\frac{1}{(6\beta^2)^2}$, $\beta\le\mu$ et $4+n_*-\sigma\le4+2n_*-\sigma\le0$ donc

$$(1)\le4\mu^5K_0\sqrt{\overline{\varepsilon}}\mu_n^{-2}. \tag{II.86}$$

Ensuite (II.13), (II.17) et $(\mathrm{II}.67)_j$, $1 \leq j \leq n$ impliquent pour $n \geq 2$

$$\begin{aligned}(2) &\leq \beta \|(I - S_{n-1}) R_{n-1}\|_{n_*} \\ &\leq \beta^2 \mu_{n-1}^{n_*-s_*+2} a_1 \overline{\varepsilon} \left(\mu^{s_*-2-\sigma} + \sum_{j=2}^{n-1} \mu_{j-1}^{s_*-2-\sigma}\right) \\ &\leq \beta^2 a_1 \overline{\varepsilon} \mu_{n-1}^{n_*-\sigma}\end{aligned}$$

or $\beta \leq \mu, n_* - \sigma \leq -2$, et $\mu^4 a_1 \sqrt{\overline{\varepsilon}} \leq a_2 \sqrt{\overline{\varepsilon}} \leq 1$, donc

$$(2) \leq \mu^4 a_1 \overline{\varepsilon} \mu_n^{-2} \leq \sqrt{\overline{\varepsilon}} \mu_n^{-2}, \tag{II.87}$$

et pour $n = 1, (2) = 0$.

D'autre part (II.13), (II.17), (II.53), (II.54) et $\beta \leq \mu$ donnent:

$$\begin{aligned}(3) \leq \beta \|(I - S_{n-1}) G(0)\|_{n_*} &\leq \beta^2 \mu_{n-1}^{n_*-s_*} \|G(0)\|_{s_*} \\ &\leq \beta^3 \mu_{n-1}^{-2} \overline{\varepsilon} \leq \beta^3 \mu^2 \overline{\varepsilon} \mu_n^{-2} \leq \sqrt{\overline{\varepsilon}} \mu_n^{-2}.\end{aligned} \tag{II.88}$$

Finalement (II.13) et $(\mathrm{II}.67)_n$ impliquent

$$(4) \leq \beta \|r_n\|_{n_*} \leq \beta^2 a_1 \overline{\varepsilon} [\max(\mu, \mu_{n-1})]^{n_*-\sigma}.$$

Or $\beta \leq \mu, n_* - \sigma \leq -4 - n_* \leq -2$ et $a_1 \mu^4 \sqrt{\overline{\varepsilon}} \leq a_2 \sqrt{\overline{\varepsilon}} \leq 1$ donc

$$(4) \leq \mu^2 a_1 \overline{\varepsilon} [\max(\mu, \mu_{n-1})]^{-2} \leq \mu^4 a_1 \overline{\varepsilon} \mu_n^{-2} \leq \sqrt{\overline{\varepsilon}} \mu_n^{-2}. \tag{II.89}$$

(II.51), (II.53), (II.86), (II.87), (II.88) et (II.89) impliquent alors:

$$\theta_n \leq 7 K_0 \mu^5 \sqrt{\overline{\varepsilon}} \mu_n^{-2} = a_3 \sqrt{\overline{\varepsilon}} \mu_n^{-2} \leq a_2 \sqrt{\overline{\varepsilon}} \leq 1.$$

h) $(\mathrm{II}.70)_n$: On a

$$A_n(2) \leq \max\left(1, \max_{1 \leq i,j \leq n} \left|\frac{\partial F}{\partial u_{ij}} (\varphi_{pq} + \overline{\varepsilon} (\tilde{w}_n)_{pq})\right|_2 + \theta_n\right).$$

D'après (II.20), (II.48), $(\mathrm{II}.65)_n$ et $(\mathrm{II}.69)_n$ on obtient $A_n(2) \leq M_0$. □

Maintenant on va montrer à l'aide de la Proposition II.12 la convergence de la suite (w_n).

Prenons $\sigma = s_* - 2 - \kappa$ et $s = \sigma - \kappa$. On a d'après (II.55), $(\mathrm{II}.63)_j$ et pour tous $i, k \in \mathbb{N}^*$, $i > k$

$$\|w_i - w_k\|_s \leq \sum_{j=k+1}^{i} \|u_j\|_s \leq \beta \sqrt{\overline{\varepsilon}} \sum_{j=k+1}^{i} \mu_{j-1}^{-\kappa} = \beta \sqrt{\overline{\varepsilon}} \sum_{j=k+1}^{i} [\mu^{-\kappa}]^{j-1}$$

or $\mu \geq 2, \kappa > 0$ donc $\|w_i - w_k\|_s$ tend vers zéro lorsque i et j tendent vers l'infini. Il existe donc une fonction $w \in H^{s_*-2-2\kappa}(\Omega)$ telle que (w_n) converge vers w. D'après l'injection de Sobolev $w \in C^{s_*-2-\frac{n}{2}-2\kappa}(\Omega) \subset C^{[s_*-3-\frac{n}{2}]}(\Omega)$. D'autre part

$$G(w_n) = (I - S_{n-1}) R_{n-1} + (I - S_{n-1}) G(0) + r_n.$$

On a d'après (II.14) et $(\mathrm{II}.67)_n$ pour $n \geq 2$

$$\|r_n\|_{s_*-2-2\kappa} \leq a_1 \beta \overline{\varepsilon} \mu_{n-1}^{s_*-2-2\kappa-\sigma} = a_1 \beta \overline{\varepsilon} \mu_{n-1}^{-\kappa}. \tag{II.90}$$

(II.17), (II.18) et (II.54) impliquent:

$$\|(I-S_{n-1})G(0)\|_{s_*-2-2\kappa} \leq \beta\mu_{n-1}^{-2-2\kappa}\|G(0)\|_{s_*} \leq \beta^2\mu_{n-1}^{-2-2\kappa}\overline{\varepsilon}. \tag{II.91}$$

Enfin (II.17) et $(\text{II.67})_j$, $1 \leq j \leq n$ donnent:

$$\begin{aligned}
&\|(I-S_{n-1})R_{n-1}\|_{s_*-2-2\kappa} \\
&\qquad \leq \beta\mu_{n-1}^{-2\kappa}\|R_{n-1}\|_{s_*-2} \leq \beta\mu_{n-1}^{-2}\sum_{j=1}^{n-1}\|r_j\|_{s_*-2} \\
&\qquad \leq \beta\mu_{n-1}^{-2\kappa}\overline{\varepsilon}a_1\left(\mu^{s_*-2-\sigma}+\sum_{j=2}^{n-1}\mu_{j-1}^{s_*-2-\sigma}\right) \\
&\qquad \leq \overline{\varepsilon}\beta a_1\mu_{n-1}^{-2\kappa}\mu_{n-1}^{s_*-2-\sigma} \leq \beta a_1\overline{\varepsilon}\mu_{n-1}^{-\kappa}.
\end{aligned} \tag{II.92}$$

(II.90) à (II.92) montrent que $G(w_n)$ tend vers zéro dans $H^{s_*-2-2\kappa}(\Omega)$ lorsque n tend vers l'infini donc $G(w)=0$ car $H^{s_*-2-2\kappa}(\Omega)\subset C^2(\Omega)$. De plus $w_n|_{\partial\Omega}=0$, d'où $w|_{\partial\Omega}=0$. On obtient alors la solution du Théorème A en posant $u=\varphi+\overline{\varepsilon}w$. D'après le Lemme II.2 et comme f est positive, cette solution est convexe; l'unicité découle du principe du maximum (cf. [C.N.S.2]). $\square$

Bibliographie

[A.G] S. Alinhac, P. Gérard: *Opérateurs pseudo-différentiels et théorème de Nash-Moser*, InterEditions et Editions du CNRS, 1991. MR **93g:**35001

[A] K. Amano: *The Dirichlet problem for degenerate elliptic 2-dimensional Monge-Ampère equation*, Bull. Austral. Math. Soc. **37** (1988), 389–410. MR **89h:**35115a

[C.N.S.1] L. Caffarelli, L. Nirenberg, J. Spruck: *The Dirichlet problem for nonlinear second-order elliptic equations. I. Monge-Ampère equation*, Comm. Pure Appl. Math. **37** (1984), 369–402. MR **87f:**35096

[C.N.S.2] L. Caffarelli, L. Nirenberg, J. Spruck: *The Dirichlet problem for nonlinear second-order elliptic equations. II. Complex Monge-Ampère and uniformly elliptic equations*, Comm. Pure Appl. Math. **38** (1985), 209–252. MR **87f:**35097

[C.N.S.3] L. Caffarelli, L. Nirenberg, J. Spruck: *The Dirichlet problem for the degenerate Monge-Ampère equation*, Rev. Mat. Iberoamericana **2** (1986), 19–27. MR **87m:**35103

[E] L. Evans: *Classical solutions of fully nonlinear, convex, second-order elliptic equations*, Comm. Pure Appl. Math. **25** (1982), 333–363. MR **83g:**35038

[G.T] D. Gilbarg, N. S. Trudinger: *Elliptic partial differential equations of second order*, 2nd ed., Springer-Verlag, Berlin and New York, 1983. MR **86c:**35035

[H.Z] J. Hong, C. Zuily: *Existence of C^∞ local solutions for the Monge-Ampère equation*, Invent. Math. **89** (1987), 645–661. MR **88j:**35056

[Hör] L. Hörmander: *On the Nash-Moser implicit function theorem*, Acad. Sci. Fenn. Ser. A I Math. **10** (1985), 255–259. MR **87a:**58025

[K] N. V. Krylov: *Boundedly nonhomogeneous elliptic and parabolic equations in a domain*, Math. USSR Izv. **22** (1984), 67–97.

[L] C. S. Llin, *The local isometric embedding in $\mathbb{R}^3$ of two dimensional Riemannian manifolds with nonnegative curvature*, J. Differential Geom. **21** (1985), 213–230. MR **87m:**53073

[O.R] O. A. Oleinik, E. V. Radkevich: *Second order equations with non negative characteristic form*, Plenum Press, New York, 1973. MR **56:**16112

[T] N. S. Trudinger: *Fully nonlinear, uniformly elliptic equations under natural structure conditions*, Trans. Amer. Math. Soc. **278** (1983), 751–769. MR **85b:**35016

[U] J. I. E. Urbas: *Elliptic equations of Monge-Ampère type*, Thesis, Australian National University, 1984.

[Z] C. Zuily: *Sur la régularité des solutions non strictement convexes de l'équation de Monge-Ampère réelle*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4) **15** (1988), 529–554. MR **91e:**35095

Université de Paris-Sud, Département de Mathématiques, Bât. 425, 91405 Orsay, Cedex, France

Current address: Département de Mathématiques, Faculté des Sciences de Tunis, Campus Universitaire le Belvedere, 1060 Tunis, Tunisie

E-mail address: sami.baraket@fst.rnu.tn